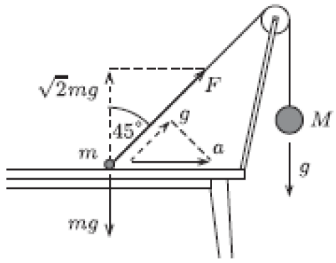
TWEEDE RONDE
NATUURKUNDE OLYMPIADE
2018

TOETS 1
Antwoorden

NATUURKUNDE OLYMPIADE

18 APRIL 2018

1 Bollen en katrol (5 pt)



Stel dat de kleine bal niet vlak na het loslaten van het tafelblad wordt getild. Als deze aanname klopt, dan is de versnelling van de kleinere bal op dat moment horizontaal. Geef deze versnelling aan met a zoals in de figuur.

Aangezien M veel groter is dan m, bevindt de grotere bal zich praktisch in vrije val en is de neerwaartse versnelling g. Het volgt dat de lengte van de draad tussen de kleinere bal en de katrol ook afneemt met versnelling g. Maar deze versnelling van de draad moet gelijk zijn aan het deel van de versnelling van de kleine bal dat in dezelfde richting ligt. d.w.z.

$$a \cos 45° = g$$

Wat inhoudt dat $a = \sqrt{2}g$.
Aangezien deze horizontale versnelling wordt veroorzaakt door de horizontale component van de spanning F in de draad, moet deze component een grootte hebben van$\sqrt{2}mg$.
Verder, aangezien de draad is uitgelijnd op 45 ° boven de horizontaal, moet de opwaartse verticale samenstelling van F dezelfde waarde hebben. Dit betekent dat de bal van massa m zowel een verticale opwaartse kracht van $\sqrt{2}mg$ en een neerwaartse zwaartekracht van mg ervaart. Omdat het oppervlak van de tafel alleen opwaarts gerichte normaalkrachten kan uitoefenen, kan de netto verticale component of de versnelling van de kleinere bal niet nul zijn.
Dit is in tegenspraak met onze aanvankelijke veronderstelling, die daarom verkeerd moet zijn; zo wordt de kleinere bal vanaf het tafelblad onmiddellijk na de vrijgave opgetild.

Notitie. Vergelijking (1) geeft aan dat $a > g$ en dit kan verrassend lijken; $a = g \cos 45°$ leek misschien een logischer resultaat. Het is echter soms moeilijk om versnellingen op een bepaald moment te visualiseren, omdat er geen 'zichtbare' afstanden zijn. Om de situatie in 'meer concrete' termen uit te drukken. we kunnen het beschouwen als relatief ten opzichte van een reeks $x - y$-assen. waarbij het punt waarop de draad de katrol voor het eerst raakt $(0, h)$ is en de kleine massa zich op $(-x, 0)$ bevindt. met $0 \leq x \leq h$. Dan is de snelheid waarmee het massa-katrolsegment van draad verkort duidelijk gt met $(t \geq 0)$ en kunnen we schrijven

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1-x)^2 + h^2]^{1/2} = -gt$$

Hiermee vinden we na wat zorgvuldig rekenwerk

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(x^2 + h^2)^{1/2}}{x} g - \frac{h^2}{x^3} g^2 t^2$$

Wat geeft dat $a = \sqrt{2}g$ als $t = 0$ en $x = h$ (wat overeenkomt met de hoek van 45° in de opgave.

2 Slingeren

Stel dat beide systemen over een hoek α zijn gedraaid.
Als aangetoond kan worden dat beide systemen steeds dezelfde hoeksnelheid hebben, is de periode ook gelijk.
Voor de massa aan het koord geldt:

$$\tfrac{1}{2} m L^2 \omega^2 = mgL \sin \alpha$$

Oftewel

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\sin\alpha}$$

Voor de lat:

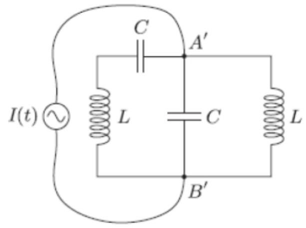
$$\tfrac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$$

Oftewel

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\alpha}$$

Dus als $L = \frac{2}{3}l$ zijn de periodes gelijk.

3 LC-circuit (5 pt)



Kies twee eindpunten van elk schakelelement, zeg de punten A' en B' in de figuur en verbind deze met een regelbare wisselstroombron.
Als de hoekfrequentie van de stroombron wordt gewijzigd en een van de natuurlijke frequenties van de schakeling nadert, stijgt de spanning tussen de willekeurig gekozen punten sterk. Bij resonantie produceert een zeer kleine ingangsstroom een grote spanning, d.w.z. de impedantie $Z_{\mathrm{A`B`}}$ tussen de punten A 'en B' nadert oneindig:

$$Z_{\mathrm{A`B`}} = \left(\frac{1}{iL\omega} + iC\omega + \frac{1}{iL\omega + 1/iC\omega}\right)^{-1} \to \infty$$

Dit is zo, als de vergelijking in de haakjes gelijk is aan 0. Met wat algebra en het feit dat $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ vinden we:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1 = 0$$

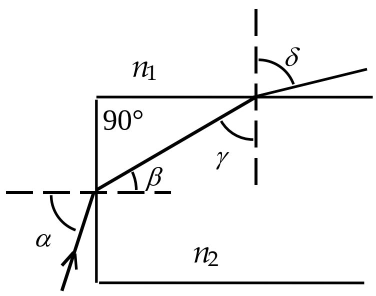
De natuurlijke hoekfrequentie van deze ‘2L2C’ schakeling is dan

$$\omega_{1,2} = \omega_0\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\omega_0$$

De laatste vereenvoudiging krijg je met

$$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 1^2 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\right)^2$$

4 Totale reflectie (5 pt)



For the refraction at the side of the rod, we have $n_2\ \sin\gamma = n_1\ \sin\delta$.
The minimum angle for total reflection γ_{min} occurs when $\delta = 90°$.

$$n_2 \sin\gamma_{min} = 1{,}00 \cdot 1 = 1$$

$$\sin\gamma_{min} = \frac{1}{n_2}$$

Find the maximum angle of refraction at the end of the rod.

$$\beta_{max} = 90° - \gamma_{min}$$

Because the sine function increases with angle, for the refraction at the end of the rod, we have the following.

$$n_1\ \sin\alpha_{max} = n_2\ \sin\beta_{max}$$

$$1{,}00 \cdot \sin \alpha_{max} = n_2 \ \sin(90° - \gamma_{min}) = n_2 \cos \gamma_{min}$$

If we want total internal reflection to occur for any incident angle at the end of the fiber, the maximum value of α is 90°, so $n_2 \cos \gamma_{\min} = 1$.

When we divide this by the result for the refraction at the side, we get $\tan \gamma_{min} = 1$ or $\gamma_{min} = 45°$

Thus we have the following:

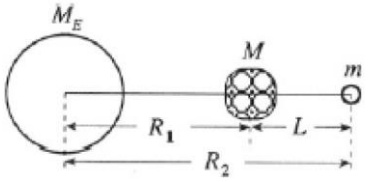
$$n_2 \geq \frac{1}{\sin \gamma_{min}} = \frac{1}{\sin 45°} = 1{,}414$$

5 Astronaut in gevaar? (5 pt)

Het ruimteschip beweegt onder invloed van het zwaartekrachtsveld van de aarde, met

$$F = G\frac{MM_\mathrm{E}}{R_1^2}$$

Met M de massa van het ruimteschip, M_E de massa van de aarde. $R_1$is de afstand van het middelpunt van de aarde tot het ruimteschip en G is de gravitatieconstante.



Voor het ruimteschip kunnen we noteren:

$$G\frac{MM_\mathrm{E}}{R_1^2} - T = M\Omega^2 R_1$$

Met Ω de hoeksnelheid van het ruimteschip en T de spanning in de communicatiekabel.

Voor de astronaut geldt op eenzelfde manier:

$$G\frac{mM_\mathrm{E}}{R_2^2} + T = m\Omega^2 R_2$$

Met m de massa van de astronaut, R_2 de straal van de baan van de astronaut en Ω de hoeksnelheid van zijn baan om de aarde.

We nemen aan dat de astronaut en het ruimteschip in één lijn zijn met het middelpunt van de aarde, dan is de hoeksnelheid gelijk en kunnen we die in de vergelijkingen elimineren

$$\frac{1}{MR_1}\left(G\frac{MM_\mathrm{E}}{R_1^2} - T\right) = \frac{1}{mR_2}\left(G\frac{mM_\mathrm{E}}{R_2^2} + T\right)$$

Hier kunnen we de spanning op de communicatiekabel uit halen:

$$T = \frac{Mm}{MR_1 + mR_2}\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_1^2 R_2^2}\right) M_\mathrm{E} G$$

Met de aannames $R_1 \approx R_2 \approx R$, $R_2^3 - R_1^3 = (R_2 - R_1)[R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2] \approx 3R^2 L$

kunnen we T als volgt herschrijven:

$$T = 3\frac{Mm}{M+m} L \frac{M_\mathrm{E} G}{R^3} = 3\frac{L}{R}\frac{Mm}{M+m} g$$

Met g de valversnelling aan het aardoppervlak. Omdat $M \gg m$ kunnen we nog eenvoudiger schrijven

$$T = 3\frac{Lmg}{R} = 3 \cdot \frac{100 \cdot 110 \cdot 9{,}8}{6400 \cdot 10^3} \approx 0{,}05\mathrm{N}$$

Ofwel, de kabel houdt de astronaut bij het ruimteschip.

TWEEDE RONDE
NATUURKUNDE OLYMPIADE
2018

TOETS 2
Antwoorden

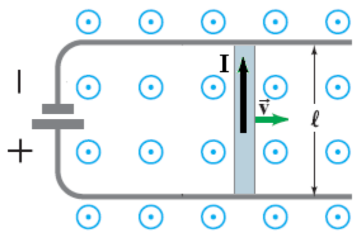
NATUURKUNDE
OLYMPIADE

18 APRIL 2018

6 Katapult-bungee (5 pt)

Uit de lengte van 28 m en de hoek van 20° volgt dat de verticale afstand tussen de gondel en het ophangpunt gelijk is aan 28 · cos 20° = 26,31 m.
De horizontale bedraagt hier 28 · sin 20° = 9,58 m. Deze afstand blijft tijdens het afschieten dus constant.
De hoogste snelheid wordt bereikt als de gondel 13 meter is gestegen (gegeven), dan is de verticale afstand tussen gondel en ophangpunt dus 26,31 – 13 = 13,31 m.
De lengte van de elastiek is dan dus SQR($13{,}31^2 + 9{,}58^2$) = 16,40 m
De hoek die de elastiek dan met de verticaal maakt is dan: invtan (9,58/13,31) = 35,74°
Omdat op dat moment de maximum snelheid is bereikt, geldt dat de som van de krachten nul is.
Dus: 2 X $F_{elastiek}$ X cos 35,74°= 300 X 9,81
Hieruit volgt: $F_{elastiek}$ = 1813 N
Bij een lengte afname van 28 – 16,40 = 11,60 m is er een krachtafname van 6300 – 1813 = 4487 N.
De veerconstante van een elastiek is dus: 4487/11,60 = 386,8 N/m
De uitrekking van de elastieken in de beginsituatie was u = F/C = 6300/386,8 = 16,29 m
Nu energiebehoud toepassen:
$E_{veer1} = E_{veer2} + E_{z2} + E_{kin2}$
2 X 0,5 X 386,8 X $16{,}29^2$ = 2 X 0,5 X 386,8 X $(16{,}29 - 11{,}60)^2$ + 300 X 9,81 X 13 + 150 X v^2
Dit levert op: v = 19 m/s

7 Bewegende staaf (5 pt)



(a) Using Newton's second law we can integrate the acceleration to calculate the velocity as a function of time.

$$F = m\frac{dv}{dt} = BIl \rightarrow \int_0^v dv = \frac{BIl}{m}\int_0^t dt \rightarrow v(t) = \frac{BIl}{m}t$$

(b) For a constant emf, the current will vary with the speed of the rod, as motional emf opposes the motion of the rod. The current produced by the induced emf opposes the current produced by the battery.

$$F = m\frac{dv}{dt} = IlB = \left(\frac{U_0 - Blv}{R}\right)lB$$

$$\frac{dv}{U_0 - Blv} = \frac{lB}{mR}dt \rightarrow \frac{dv}{v - U_o/Bl} = -\frac{l^2B^2}{mR}dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v - U_o/Bl} = \frac{l^2B^2}{mR}\int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{v - U_0/Bl}{-U_0/Bl}\right) = -\frac{B^2l^2}{mR}t$$

$$v(t) = \frac{U_0}{Bl}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$$

(c) With constant current, the acceleration is constant and so the velocity does not reach a terminal velocity. However, with constant emf, the increasing motional emf decreases the applied force. This results in a limiting, or terminal velocity of U_0/Bl.

8 Ladingen langs een lijn (5 pt)

(a) Kies een cilindrisch gaussdoosje concentrisch met de draad. Het vlak loodrecht op de draad is een symmetrievlak, dus de flux door beide deksels is nul.
Er is cilindersymmetrie, dus het veld is radieel gericht:
$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = EA = E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$, dus $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$

(b) $r < R_1$, en $r > R_2 \rightarrow E = 0$
$R_1 < r < R_2$: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}\hat{r}$

(c) $V = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

(d) $\vec{F}_{\text{per meter}} = -\vec{E}\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2}\hat{r}$

9 Licht door spleten (5 pt)

(a) Bij een enkele spleet geldt voor de minima:

$$\sin(\theta) = \frac{k\lambda}{d}$$

Terwijl bij de kleine hoeken hier sinus en tangens wel gelijk te stellen zijn

$$\tan(\theta) = \frac{s}{l} = \frac{k\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{sd}{kl}$$

Voor het minimum geldt hier dat s = 4,5·10^{-3} m

Invullen geeft voor de golfengte:

λ = 5,63·10^{-7} m

(b) Voor maximum geldt $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{4\lambda} = 0,25$

Dan geldt voor de tangens dat deze gelijk is aan 0,258. De afstand d voor een maximum t.o.v de nulde orde is dan

$$d = x \tan\alpha$$

En de twee eerste orde liggen dan 2d uit elkaar.

10 Ideaal gas (5 pt)

Proces 1 → 2 is een irreversibel proces tegen een constante buitendruk, waarvoor geldt (met $PV = RT$ voor 1 mol ideaal gas):

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P^{ext} dV = -P^{ext}(2V_1 - V_1) = -\frac{P^{ext}}{P_1} RT_1 = -0{,}2 \times 8{,}314 \times 300 = -498{,}8 \text{ J}$$

Omdat de temperatuur aan het begin en eind van het proces hetzelfde is, en we in dit geval te maken hebben met een ideaal gas, is de energietoename gelijk aan nul (denk er aan: de energie is een toestandsgrootheid, warmte en arbeid niet!):

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} R(T_2 - T_1) = 0$$

De toegevoerde warmte berekenen we met behulp van de eerste hoofdwet:

$$Q = \Delta U - W = -W = 498{,}8 \text{ J}$$

Proces 2 → 3 is een isochore afkoeling, waarvoor geldt:

$$W = 0$$

$$Q = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R(T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \times 8{,}314 \times (250 - 300) = -623{,}6 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W = -623{,}6 \text{ J}$$

Voor het complete proces (1 → 3) vinden we dus:

$W = -498{,}8$ J, $Q = -124{,}8$ J en $\Delta U = -623{,}6$ J